

Das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen
mit Werten in einem Banachraum

Diplomarbeit

eingereicht von Jonas Werner
Betreuer: Prof. Dr. Jürgen Leiterer

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Berlin, den 1.10.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Skalare Funktionen	3
3	Funktionen mit Werten in Banachräumen	9
3.1	Das schwache Maximumprinzip	9
3.2	Das Maximumprinzip für Hilberträume	11
3.3	Das Maximumprinzip für die Folgenräume ℓ^p	12
3.4	Das Maximumprinzip für die Funktionenräume L^p	18
3.5	Ein äquivalentes Kriterium	21
4	Literatur	27
5	Thesen	29

1 Einleitung

Reduziert man bei Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ den Bildraum auf seine Banachraumeigenschaft, so bleiben viele Erkenntnisse der Funktionentheorie - wie der Potenzreihenentwicklungssatz, der Satz von Liouville oder auch der Identitätssatz - erhalten, was vor allem dem Satz von Hahn-Banach geschuldet ist. Betrachtet man also holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum, so ist beim strengen Maximumprinzip - im Gegensatz zum schwachen - eine Übertragung für derartige Funktionen unabhängig vom konkreten Banachraum, speziell seiner Norm, nicht mehr möglich. Man bezeichne einen Banachraum als MP-Raum, wenn für alle holomorphen Funktionen mit Werten in diesem das strenge Maximumprinzip erfüllt ist; so ist es Anliegen dieser Arbeit, gerechtfertigt durch die Feststellung, dass einige - aber nicht alle - Banachräume MP-Räume sind, eine Klassifizierung dieser vorzunehmen.

Konkret besagt das strenge Maximumprinzip, dass eine holomorphe Funktion ihr Maximum nicht im Innern annehmen kann, ohne konstant zu sein. Aber bereits für den Banachraum \mathbb{C}^2 - versehen mit der Maximumnorm - haben wir mit $f(z) := (1, z)$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion, die ihr Normmaximum im Innern der komplexen Einheitskreisscheibe annimmt. Betrachtet man die Klasse der Banachräume, für welche das strenge Maximumprinzip gilt, findet sich mit den Hilberträumen zwar schnell eine erste große Gruppe, doch zielt diese Arbeit unter Zuhilfenahme der entsprechenden Literatur auf eine umfassende Beschreibung dieser Klasse, welche schließlich mit der Arbeit von Thorp und Whitley [7] gelingt.

So erfüllen holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum genau dann das strenge Maximumprinzip, wenn alle Punkte der Einheitssphäre des Bildraumes komplexe Extrempunkte seiner abgeschlossenen Einheitskugel sind.

Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Jürgen Leiterer für die große fachliche Hilfe, Frau Anne-Katrin Dorow für Ihre Beratung und Aufmunterung, den Korrektoren für ihre Mühen und Lotte, Maggie und Anja für die Liebe im Alltag.

Ich widme diese Arbeit meiner Tochter und ihrer reizenden Mutter, meiner Mutter und meinem Vater, meinen Geschwistern und ihren Liebsten, meinen Freunden und Zopfköpfchen samt Würmchen.

2 Skalare Funktionen

Der Banachraum \mathbb{C} ist beim Studium von Funktionen mit Werten in einem Banachraum Vorbild und Werkzeug zugleich. Um die nötigen skalaren Sachverhalte skizzieren zu können, seien folgende Vereinbarungen getroffen. \mathbb{N} sei eine Bezeichnung für die positiven natürlichen Zahlen, \mathbb{R}^+ bezeichne die reellen Zahlen größer Null und \mathbb{C} den komplexen Zahlenraum, welchen man auch als \mathbb{R}^2 auffassen kann. Zu jeder komplexen Zahl z gehören dann die eindeutig bestimmten reellen Koordinaten x (Realteil von z) und y (Imaginärteil von z) mit $z = x + iy$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichne, für welche $i^2 = -1$ gilt. Bei gegebenem f seien u und v die reellwertigen Funktionen, die jedem z den Real- bzw. den Imaginärteil von $f(z)$ zuordnen und man kann verkürzend $f = u + iv$ notieren. Unter einem Gebiet verstehe man stets eine nichtleere zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Zahlen, wobei eine Menge M zusammenhängend heiße, wenn jede lokal konstante Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ konstant ist. Der Begriff offen resultiere dabei aus der durch den Betrag - als die euklidische Norm - $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ induzierten Metrik. Weiter sei mit \overline{M} der Abschluss einer Menge M bezeichnet und eine Menge liege ganz in einer anderen, wenn ihr Abschluss in ihr liegt.

Mit Hilfe des ersten Satzes werden wir die - aufgrund des Themas dieser Arbeit - wichtigen Maximumprinzipien für (skalare) holomorphe Funktionen beweisen.

2.1 Satz. *Wenn*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit $|z - a| < R$ und wenn $0 < r < R$, dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})|^2 dt.$$

Der Beweis ist bei Rudin [6] auf Seite 253 nachzulesen und erfolgt unter Zuhilfenahme der Parsevalschen Gleichung¹.

2.2 Satz (Maximumprinzip). *Sei D ein Gebiet. Hat eine holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ein Betragsmaximum im Punkt $a \in D$, gilt also für alle $z \in D$*

$$|f(a)| \geq |f(z)|,$$

so ist sie konstant.

Beweis. a liegt, wie alle Punkte eines Gebietes, im Innern von D . Daher gibt es auch eine Kreisscheibe um a mit positivem Radius R , die ganz in D liegt und auf der sich f lokal in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ entwickeln läßt. Für alle $r < R$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt laut Voraussetzung $|f(a)| \geq |f(a + re^{it})|$ und somit

¹Vergleiche dazu mit Satz 3.6!

wegen Satz 2.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)|^2 dt = |f(a)|^2 = |a_0|^2.$$

Folglich sind alle a_i mit $i \geq 1$ gleich Null, also ist f konstant auf der genannten Kreisscheibe. Eine direkte Folgerung aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen ist die Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung. Demnach resultiert die Konstanz einer holomorphen Funktion auf dem ganzen Gebiet bereits aus der auf einer Teilmenge, die einen Häufungspunkt enthält. f ist konstant. \square

2.3 Korollar (schwaches Maximumprinzip). Eine auf dem Abschluss eines beschränkten Gebietes stetige und im Innern holomorphe Funktion nimmt ihr Betragsmaximum auf dem Rand des Gebietes an.

Beweis. Sollte die Funktion ihr Betragsmaximum im Innern annehmen, so folgt aus dem Maximumprinzip die Konstanz der Funktion im Innern und aufgrund der Stetigkeit sogar auf dem Abschluss. Dass es überhaupt angenommen wird, sichert die Kompaktheit des Abschlusses und die dortige Stetigkeit der Funktion. \square

Bemerkung. Dass dabei die Beschränktheit des Gebietes wesentlich ist, können wir an dem unbeschränkten Gebiet $\{\xi \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\xi| < \frac{\pi}{2}\}$ und der Funktion $f(\xi) = e^{e^\xi}$ erkennen, deren Betrag laut Konstruktion auf dem Rand konstant Eins ist, nicht aber im Innern. Denn für alle Randpunkte ist e^ξ ein Vielfaches der imaginären Einheit und damit $|f(\xi)| = e^0 = 1$, da $|e^z| = e^x$ mit $z = x + iy$.

2.4 Definition. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Delta h := \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0$$

heißt *harmonisch*, wobei man $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ den *Laplaceoperator* nennt.

2.5 Definition. Eine stetige Funktion $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ offen heißt *subharmonisch in D* , wenn für alle $\xi \in D$ und $r > 0$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe $|z - \xi| \leq r$ ganz in D liegt, gilt:

$$s(\xi) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\xi + re^{it}) dt.^2$$

Mit der Schreibweise $|dz| := r \cdot dt$ motiviert durch $z = \xi + re^{it}$ also $\frac{dz}{dt} = rie^{it}$ notiere man alternativ:

$$s(\xi) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-\xi|=r} s(z) |dz|.^3$$

²Die ansonsten übliche Einführung des Begriffes der Subharmonizität für oberhalbstetige Funktionen mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist für diese Arbeit nicht notwendig.

³Nicht zu verwechseln mit einem komplexen Kurvenintegral $\oint_{\alpha} f(z) dz$!

Der folgende Satz aus Rudin [6] auf Seite 404, der hier ausschließlich zitiert sei, macht die Namensgebung plausibel.

2.6 Satz. *Sei s eine subharmonische Funktion in Ω , K eine kompakte Teilmenge von Ω , h eine stetige reelle Funktion auf K , die im Innern von K harmonisch ist, und sei $s(z) \leq h(z)$ in allen Randpunkten von K . Dann gilt $s(z) \leq h(z)$ für alle $z \in K$.*

Bemerkung. Harmonische Funktionen h sind also subharmonisch; dieses wird durch ihre Mittelwerteigenschaft⁴ $h(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\xi + re^{it}) dt$ bestätigt.

2.7 Satz (Maximumprinzip für stetige subharmonische Funktionen). *Sei D ein Gebiet. Hat eine subharmonische Funktion $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein Maximum im Punkt $z^* \in D$, gilt also $s(z^*) \geq s(z)$ für alle $z \in D$, so ist sie konstant.*

Beweis. Sei $M := \{z \in D \mid s(z) = s(z^*)\}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Folge in M . Da alle z_n in M liegen, folgt $s(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) \in M$ aufgrund der Stetigkeit von s , weswegen M in D relativ abgeschlossen ist. Könnten wir zusätzlich zeigen, dass M offen ist, so wäre $M = D$ und damit s konstant.

Nehmen wir an, M sei nicht offen, so gibt es ein $z' \in M$, so dass in jeder Umgebung $z \notin M$ liegen. Also $s(z) < s(z') = s(z^*)$. Da D offen ist, gibt es auch ein $z \in D$ mit $s(z) < s(z^*)$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe um z' mit Radius $r := |z - z'|$ ganz in D liegt. z liegt also nicht in M , ist aber Randpunkt einer in D liegenden, abgeschlossenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt in M .

Die Funktion h habe den konstanten Wert $s(z')$. Da s stetig, gibt es auch eine Umgebung um z und damit auch ein Teilstück des Randes der Kreisscheibe, wo $s < h$. Da auf dem Reststück des Kreises sowieso $s \leq h$ gilt, folgte $\int_0^{2\pi} s(z' + re^{it}) dt < \int_0^{2\pi} h(z' + re^{it}) dt$. Die Subharmonizität von s und die Konstanz von h ergäben den Widerspruch

$$s(z') \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(z' + re^{it}) dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z' + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(z') dt = s(z').$$

□

Eine entscheidene Rolle spielt die folgende Hilfsfunktion.

2.8 Definition. Für eine reellwertige Funktion ϕ , definiert auf einer Kreisscheibe um $\xi \in \mathbb{C}$, sei, falls die Integrale existieren,

$$M_\phi(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\xi + re^{it}) dt.$$

$M_s(r)$ ist monoton wachsend für s subharmonisch.

⁴Siehe Rudin [6] auf Seite 284!

2.9 Satz. Sei s eine subharmonische Funktion in D , $\xi \in D$ und $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r$ derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $|z - \xi| \leq r$ ganz in D liege, so gilt

$$M_s(r_1) \leq M_s(r_2).$$

Beweis.⁵ Sei h die in $|z - \xi| < r_2$ harmonische Funktion, die in $|z - \xi| = r_2$ mit s übereinstimmt. Nach Satz 2.6 gilt $s(z) \leq h(z)$ in $|z - \xi| < r_2$ und daher

$$M_s(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\xi + r_1 e^{it}) dt = h(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\xi + r_2 e^{it}) dt = M_s(r_2).$$

□

Wie wir später in Kapitel 3.3 beim Beweis von Satz 3.13 für nullstellenfreie Gebiete oder $p \geq 2$ sehen werden, gilt für nichtkonstante Funktionen f sogar:

$M_{|f|^p}(r)$ ist streng monoton wachsend für f holomorph.

Ein erstes Indiz für das eben Behauptete ist die Tatsache, dass sowohl die Betragsfunktion einer holomorphen Funktion als auch ihre p -te Potenz subharmonisch sind, welches durch die folgenden Sätze belegt werden soll.

2.10 Lemma. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+ \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^+ : x^p \geq x_0^p + c(x - x_0)$ mit $1 < p \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es seien die Funktionen $k, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und die Konstante c für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^+$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} k(x) &:= x^p, \\ c &:= p \cdot x_0^{p-1}, \\ g(x) &:= k(x) - c(x - x_0). \end{aligned}$$

Somit ist g mindestens zweimal differenzierbar und es folgt:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^p - p \cdot x_0^{p-1}(x - x_0) = x^p - p \cdot x_0^{p-1}x + p \cdot x_0^p, \\ g'(x) &= p \cdot x^{p-1} - p \cdot x_0^{p-1} = p(x^{p-1} - x_0^{p-1}), \\ g''(x) &= p(p-1)x^{p-2}. \end{aligned}$$

Da g' die einzige Nullstelle bei x_0 hat und $g'' > 0$, gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(x_0), \\ k(x) - c(x - x_0) &\geq k(x_0), \\ x^p &\geq x_0^p + c(x - x_0). \end{aligned}$$

□

2.11 Satz. Sei f eine holomorphe Funktion in D , so ist die Funktion $s := |f|^p$ für $p \geq 1$ subharmonisch in D .

Beweis.⁶ Seien $\xi \in D$ und $r \in \mathbb{R}^+$ derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe

⁵Geführt wie in Rudin [6] auf Seite 405.

⁶Siehe auch Hörmander [4] auf Seite 18!

um ξ mit Radius r ganz in D liegt.

Für $p = 1$ folgt das Behauptete aus der Mittelwertgleichung für holomorphe Funktionen

$$s(\xi) = |f(\xi)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\xi + re^{it}) dt.$$

Sei $p > 1$. Wegen Lemma 2.10 gilt für $|f(\xi + re^{it})| \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} |f(\xi + re^{it})|^p &\geq x_0^p + c(|f(\xi + re^{it})| - x_0) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^p dt &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0^p dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(|f(\xi + re^{it})| - x_0) dt \\ &\geq x_0^p + c \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})| dt - x_0 \right). \end{aligned}$$

Sei nun $x_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})| dt$ derart gewählt, dass die letzte Klammer verschwindet, so

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\xi + re^{it}) dt \geq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})| dt \right)^p.$$

Wir wissen bereits, dass $|f(z)|$ subharmonisch in D ($p = 1$) und die Funktion $k(x) = x^p$ monoton wachsend ist. Es folgt die Subharmonizität von $s = k \circ f$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\xi + re^{it}) dt \geq |f(\xi)|^p = s(\xi).$$

□

Für holomorphe f wissen wir also $|f(\xi)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^p dt$. Darüber hinaus läßt sich im Falle der Gleichheit sogar die Konstanz der holomorphen Funktion zeigen. Der nachstehende Satz wird im Kapitel 3.3 auch für $p \geq 1$ bewiesen und so durch Satz 3.13 verallgemeinert.

2.12 Satz. *Sei D ein Gebiet, $\xi \in D$ und $r \in \mathbb{R}^+$ derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe um ξ mit Radius r ganz in D liege. Eine in D holomorphe Funktion f ist genau dann konstant, wenn*

$$|f(\xi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^2 dt.$$

Beweis. Trivialerweise gilt für f konstant:

$$|f(\xi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^2 dt.$$

Sei nun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \xi)^n$$

die Potenzreihenentwicklung der holomorphen Funktion f in ξ , so folgt nach Satz 2.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^2 dt = |f(\xi)|^2 = |c_0|^2,$$

also $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$. $f(z) = c_0 = f(\xi)$ ist somit konstant. □

2.13 Korollar. *Alle Mitglieder einer Familie $(f_j)_{j \in I}$ in einem Gebiet D holomorpher Funktionen sind konstant, wenn $z^* \in D$ mit $\sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^2 < \infty$ und $r \in \mathbb{R}^+$ existieren, so dass für alle $z \in \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z^*| \leq r\} \subset D$ gilt:*

$$\sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^2 \geq \sum_{j \in I} |f_j(z)|^2.$$

Beweis. Laut Voraussetzungen gilt mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^2 dt &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j \in I} |f_j(z^* + re^{it})|^2 dt \\ \sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^2 &\geq \sum_{j \in I} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_j(z^* + re^{it})|^2 dt. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.11 sind alle $|f_j(z)|^2$ mit $j \in I$ subharmonisch, also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_j(z^* + re^{it})|^2 dt \geq |f_j(z^*)|^2.$$

Angenommen es gäbe ein $k \in I$ mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_k(z^* + re^{it})|^2 dt > |f_k(z^*)|^2,$$

so ergäbe sich für die folgende Summe nichtnegativer Zahlen folgender Widerspruch:

$$\sum_{j \in I} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_j(z^* + re^{it})|^2 dt > \sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^2 \geq \sum_{j \in I} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_j(z^* + re^{it})|^2 dt.$$

Laut Satz 2.12 sind demzufolge alle f_j konstant. □

Nun besitzen wir bereits alle Hilfsmittel, um für einen ersten Banachraum die Gültigkeit des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen mit Werten in diesem zu zeigen und sogar die Frage für Funktionen mit Werten in Hilberträumen final zu beantworten.

3 Funktionen mit Werten in Banachräumen

Ein Banachraum möge MP-Raum heißen, wenn jede holomorphe Funktion mit Werten in diesem konstant ist, sobald sie im Innern ein Normmaximum besitzt. Es soll in diesem Kapitel gezeigt werden, dass für MP-Räume das Vorhandensein eines Skalarproduktes zwar hinreichend - aber nicht notwendig - ist. Mit den Folgenräumen ℓ^p und den Funktionenräumen L^p , die im Allgemeinen keine Hilberträume darstellen, werden dafür zwei MP-Raum-Beispiele aufgezeigt.

Einen Abschluss erhält diese Arbeit mit dem Kapitel 3.5, da in diesem unter Zuhilfenahme der Arbeit [7] von Thorp und Whitley die Menge der MP-Räume genau bestimmt wird.

Vorab gilt es, den neuartigen Holomorphiebegriff für Funktionen f mit Werten in Banachräumen einzuführen, welche ab sofort komplex (Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen) seien. So heiße $f : \Omega \rightarrow B$ mit offenem Ω *holomorph*, wenn $\lim_{\xi \rightarrow z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ für alle $z \in \Omega$ existiert. Analog zum skalaren Fall existieren die partiellen Ableitungen von f bezüglich der kanonischen reellen Koordinaten x und y , die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen sind erfüllt und die Funktion $f'(z) := \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z)$ heiße *Ableitung von f* .

3.1 Das schwache Maximumprinzip

Der Satz von Hahn-Banach erweist sich als äußerst hilfreich, um Erkenntnisse über holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum aus dem jeweiligen skalaren Fall abzuleiten. Für das Aufzeigen seiner Wirkung genügt es, eine direkte Konsequenz aus dem Satz von Hahn-Banach anzugeben, wobei X' den *Dualraum von X* , also den Raum der Funktionale, bezeichne.

3.1 Korollar.⁷ *In jedem normierten Raum X existiert zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$, ein Funktional $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$.*

Bemerkung. Versehen mit der Norm $\|x'\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$ stellt X' einen Banachraum dar und an jeder Stelle des Raumes gilt $|F(x)| \leq \|F\| \|x\|$.

Folgerungen sind der Identitätssatz sowie der Satz von Liouville und auch:

$\|f\|$ ist subharmonisch für holomorphes f .

3.2 Satz. *Seien D ein Gebiet, B ein Banachraum und $f : D \rightarrow B$ holomorph, so ist $\|f(\cdot)\| : D \rightarrow \mathbb{R}$ subharmonisch in D .*

Beweis.⁸ Für ein beliebiges $z_0 \in D$ gibt es nach Korollar 3.1 für das Banachraumelement $f(z_0) \in B$ ein Funktional $\chi \in B'$ mit $\|\chi\| = 1$ und $\chi(f(z_0)) = \|f(z_0)\|$. Sei $r > 0$ beliebig aber derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r ganz in D liege. Da $\chi \circ f$ (skalar) holomorph, ist ihre Betragsfunktion

⁷Zum Beweis siehe Werner [9] auf Seite 98!

⁸Beweisidee; Identitätssatz und Satz von Liouville siehe Gohberg/Leitnerer [3], Kapitel 1!

laut Satz 2.11 subharmonisch und so folgt mit

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{f}(z_0)\| &= \chi(\mathfrak{f}(z_0)) = |\chi(\mathfrak{f}(z_0))| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(f(z_0 + re^{it}))| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\chi\| \|f(z_0 + re^{it})\| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(z_0 + re^{it})\| dt \end{aligned}$$

die Subharmonizität von $\|\mathfrak{f}\|$. □

Mit dem Wissen vom Maximumprinzip für subharmonische Funktionen erhalten wir also eine erste wichtige Erkenntnis in Hinsicht auf die Maximumprinzipien:

3.3 Korollar. *Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, B ein Banachraum und $\mathfrak{f} : D \rightarrow B$ holomorph. Existieren $z^* \in D$ und $r > 0$ derart, dass für alle $|z - z^*| < r$*

$$\|\mathfrak{f}(z^*)\| \geq \|\mathfrak{f}(z)\|$$

gilt, so ist $\|\mathfrak{f}(\cdot)\| : D \rightarrow \mathbb{R}$ konstant.

Beweis. Laut Satz 2.7 ist die subharmonische Funktion $\|\mathfrak{f}(\cdot)\|$ konstant. □

Das schwache Maximumprinzip gilt für jeden Banachraum.

3.4 Korollar (schwaches Maximumprinzip). *Es seien D ein beschränktes Gebiet, B ein Banachraum und $\mathfrak{f} : \overline{D} \rightarrow B$ eine stetige Funktion, die in D holomorph sei, so nimmt sie ihr Normmaximum auf dem Rand des Gebietes an.*

Beweis. Da \overline{D} kompakt ist, nimmt $\|\mathfrak{f}\|$ ihr Maximum auf \overline{D} an. Läge es nicht auf dem Rand, so wäre $\|\mathfrak{f}\|$ laut Satz 3.3 auf D samt Abschluss konstant. □

$\|\mathfrak{f}\|$ kann also ihr Maximum nicht im Innern von D annehmen, ohne konstant zu sein. Für den skalaren Fall, also \mathbb{C} als Banachraum mit dem Betrag als Norm, folgt aus der Konstanz der Norm der Funktion sofort die der Funktion selbst, welches eine direkte Folgerung aus dem Satz von der Gebietstreue darstellt. Die Hoffnung auf eine (strenges) Maximumprinzip, unabhängig vom Banachraum beziehungsweise seiner Norm, macht nun die Tatsache zunichte, dass sich für gewisse Banachräume nichtkonstante holomorphe Funktionen konstruieren lassen, welche aber bezüglich ihrer Norm konstant sind. Analog zum nächsten Beispiel läßt sich zeigen, dass bereits für eine Funktion $\mathfrak{f} : D \rightarrow \mathbb{C}^2$ das Maximumprinzip nicht mehr gelten muss.

So sei ℓ^∞ der Banachraum der beschränkten komplexen Zahlenfolgen mit der Supremumsnorm für Folgen und $\mathfrak{f} : D \rightarrow \ell^\infty$ mit $D = \{z : |z| < 1\}$ sowie $\mathfrak{f}(z) := (1, z, z, z, \dots)$. \mathfrak{f} ist holomorph, aber nicht konstant und hat trotzdem ein Normmaximum im Innern, zum Beispiel bei Null, denn $1 = \|\mathfrak{f}(0)\|_\infty \geq \|\mathfrak{f}(z)\|_\infty = 1$ für alle $z \in D$. Demnach ist der ℓ^∞ kein MP-Raum.

Für welche Banachräume die Konstanz einer holomorphen Funktion bereits aus der ihrer Norm resultiert, wird in den Kapiteln 3.4 und 3.5 beantwortet. Vorab lernen wir erste Beispiele und Kriterien kennen.

3.2 Das Maximumprinzip für Hilberträume

Dieses Kapitel soll aufzeigen, dass es durchaus Banachräume gibt, so dass holomorphe Funktionen mit Werten in diesen das Maximumprinzip erfüllen, und mit dem Vorhandensein eines Skalarproduktes ein erstes hinreichendes Kriterium dafür angeben.

Als ein erstes Beispiel der Banachräume ℓ^p mit $1 \leq p \leq \infty$, die wir im nächsten Kapitel behandeln werden, betrachten wir den Raum ℓ^2 der quadratisch summierbaren Folgen komplexer Zahlen, versehen mit der 2-Norm, und stellen fest:

Der Folgenraum ℓ^2 ist ein MP-Raum.

3.5 Satz. *Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \ell^2$ eine holomorphe Funktion. Existieren $z^* \in D$ und $r > 0$ derart, dass für alle $|z - z^*| < r$*

$$\|f(z^*)\|_2 \geq \|f(z)\|_2$$

gilt, so ist f konstant.

Beweis. f ordnet also jeder komplexen Zahl eine Folge komplexer Zahlen mit endlicher 2-Norm zu, also $f(z) = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nun sei für jede natürliche Zahl i eine skalare Funktion f_i definiert, die jedem $z \in D$ das i -te Glied der Folge $f(z)$ zuordnet:

$$f_i(z) := \xi_i.$$

Aufgrund der Konstruktion der f_i gilt

$$\|f(z)\|_2 = \|(\xi_j)\|_2 = \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|^2} = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |f_i(z)|^2}.$$

Sie bilden somit eine Familie holomorpher Funktionen, für welche laut Voraussetzung auf der Kreisscheibe

$$\sum_{i \in I} |f_i(z^*)|^2 = \|f(z^*)\|_2^2 \geq \|f(z)\|_2^2 = \sum_{i \in I} |f_i(z)|^2$$

gilt, weswegen sie laut Korollar 2.13 mit $I = \mathbb{N}$ alle konstant - auch auf ganz D - sind. f ordnet also (gliedweise) jedem $z \in D$ dieselbe Folge $f(z^*)$ zu. □

Wir versuchen, diesen Satz zu verallgemeinern. Es sei S eine Teilmenge eines Hilbertraumes - eines Raumes mit Skalarprodukt, der vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist -, heiße *Orthonormalsystem*, falls $\|e\| = 1$ und $\langle e, f \rangle = 0$ für $e, f \in S, e \neq f$ gelten. Weiter heiße S *Orthonormalbasis*, falls $T = S$ aus $S \subset T$ und T Orthonormalsystem resultiert, und wir konstatieren:

3.6 Satz. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Sei H der Hilbertraum und S eine Orthonormalbasis, dann gilt für alle $x \in H$:

(a) $x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e$ und

(b) $\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung).

Zum Beweis sei auf Werner [9], Seite 186 verwiesen.

Da das Skalarprodukt $\langle (z_i), (\xi_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \overline{\xi_i}$ genau die 2-Norm des ℓ^2 induziert, zeigt Satz 3.5 für den einzigen Hilbertraum unter den Folgeräumen ℓ^p , dass er MP-Raum ist. Tatsächlich bewahrheitet sich folgende naheliegende Vermutung:

Jeder Hilbertraum ist ein MP-Raum.

3.7 Satz. *Seien H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der induzierten Norm $\|\cdot\|$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: D \rightarrow H$ eine holomorphe Funktion. Existieren $z^* \in D$ und $r > 0$ derart, dass für alle $|z - z^*| < r$*

$$\|f(z^*)\| \geq \|f(z)\|$$

gilt, so ist f konstant.

Beweis. Sei $\{e_i\}_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von H , dann ist mit

$$f_i(z) := \langle f(z), e_i \rangle$$

für jedes $i \in I$ eine in D holomorphe Funktion definiert. Aufgrund der Parsevalschen Gleichung folgt aus den Voraussetzungen:

$$\sum_{i \in I} |f_i(z^*)|^2 = \sum_{i \in I} |\langle f(z^*), e_i \rangle|^2 = \|f(z^*)\|^2 \geq \|f(z)\|^2 = \sum_{i \in I} |f_i(z)|^2$$

und damit laut Korollar 2.13 die Konstanz der f_i . Schließlich resultiert aus Satz 3.6(a) mit $f(z) = \sum_{i \in I} \langle f(z), e_i \rangle \cdot e_i = \sum_{i \in I} f_i(z) \cdot e_i$ das Behauptete. □

3.3 Das Maximumprinzip für die Folgenräume ℓ^p

Nach wie vor unbeantwortet ist die Frage, ob jeder MP-Raum ein Hilbertraum ist. Um diese zu verneinen, also konkret mit den ℓ^p -den Räumen der in p -ter Potenz summierbaren komplexen Zahlenfolgen $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ - zu belegen, dass das Vorhandensein eines Skalarproduktes in einen Banachraum für die Gültigkeit des Maximumprinzips nicht notwendig ist, bedarf es noch einiger skalarer Vorbereitungen und des Studiums der Höderschen und Minkowskischen Ungleichungen.

Untersucht man die Dreiecksungleichungen der p -Normen $\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$ und $\|z\|_{\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i|$ bezüglich ihrer strengen Gültigkeit, gelangt man zu folgender weniger bekannten Erkenntnis.

3.8 Satz (Höldersche Ungleichung). *Seien $1 < p < \infty$ und $q := \frac{p}{p-1}$. Für $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ und $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ ist $xy \in \ell^1$ und es gilt $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Dabei gilt „ \leq “ genau dann, wenn $(|x_i|^p)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Vielfaches von $(|y_i|^q)_{i \in \mathbb{N}}$ ist.*

Beweis.⁹ Für $0 < \lambda < 1$ und $0 < a < b$ existiert ein ϵ mit $a < \epsilon < b$, so

⁹Siehe dazu auch Köthe [5] auf Seite 138!

das nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} &= (1-\lambda)(b-a)\epsilon^{-\lambda} \text{ gilt, also} \\ b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} &< (1-\lambda)(b-a)a^{-\lambda}, \end{aligned}$$

da $\epsilon^{-\lambda} < a^{-\lambda}$. Multiplikation mit a^λ bewirkt

$$a^\lambda b^{1-\lambda} < \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Man beachte, nur wenn $a = b$, gilt $a^\lambda b^{1-\lambda} = \lambda a + (1-\lambda)b$. In Summe folgt mit

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b \text{ f\u00fcr } 0 \leq a, b \text{ und } 0 < \lambda < 1, \quad (1)$$

die „gewichtete Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel“. F\u00fcr die Folgenglieder von x und y sowie fixiertes n definieren wir

$$c_i := \frac{|x_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ und } d_i := \frac{|y_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

(1) ergibt mit $\lambda = \frac{1}{p}$, also $1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, und $a = c_i^p$ und $b = d_i^q$

$$c_i d_i \leq \frac{1}{p} c_i^p + \frac{1}{q} d_i^q, \text{ also} \quad (2)$$

$$\frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}.$$

Summieren wir diese Ungleichungen, so erhalten wir f\u00fcr alle n

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n |x_k y_k|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q} = 1, \text{ also} \\ \sum_{k=1}^n |x_k y_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Nun folgt $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$ f\u00fcr $n \rightarrow \infty$ und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn es in allen Ungleichungen (2) gilt, also der Vektor $(|x_i|^p)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Vielfaches von $(|y_i|^q)_{i \in \mathbb{N}}$ ist. □

Aus der H\u00f6lderschen ergibt sich die Minkowskische Ungleichung.

3.9 Satz (Minkowskische Ungleichung). Seien $1 < p < \infty$ und $q := \frac{p}{p-1}$.

F\u00fcr $x, y \in \ell^p$ gilt $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Dabei gilt „ $=$ “ genau dann, wenn x ein nichtnegatives Vielfaches von y ist.

Beweis. Aus der Hölderschen Ungleichung resultiert für fixes n

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ da } (p-1)q = p. \end{aligned}$$

Wir dividieren durch $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$ und bedenken $1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$, so

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nun folgt $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ für $n \rightarrow \infty$ und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn der Vektor $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Vielfaches von $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist! □

Bemerkung. Die Minkowskische Ungleichung ist trivialerweise für $p = 1$ erfüllt.

Da eine skalare holomorphe Funktion $f = u + iv$ unendlich oft komplex differenzierbar und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar ist, sind Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch, also $\Delta u = \Delta v = 0$.

3.10 Lemma. Seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow D'$ holomorph und $\varphi : D' \rightarrow \mathbb{C}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\Delta(\varphi \circ f) = ((\Delta\varphi) \circ f) |f'|^2.$$

Beweis.

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varphi \circ f)}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2(\varphi \circ f)}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi \circ f) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\varphi \circ f) = \frac{\partial^2(\varphi \circ f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi \circ f)}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta v + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) |f'|^2 \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot 0 + ((\Delta \varphi) \circ f) |f'|^2,
\end{aligned}$$

da u und v harmonisch sind und aufgrund von $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$
 $|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$ gilt.¹⁰ □

3.11 Korollar. Sei f eine in einem Gebiet D holomorphe Funktion mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so gilt für beliebiges $p \in \mathbb{R}$

$$\Delta |f|^p = p^2 |f|^{p-2} |f'|^2.$$

Beweis. Sei $\varphi(z) := |z|^p = \sqrt{x^2 + y^2}^p = (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}$, dann folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{p}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-1} \cdot 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{p}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-1} \cdot 2y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - 1 \right) (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-2} \cdot 4x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-1} \\
&= p \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-2} \left(2x^2 \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + (x^2 + y^2) \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= p \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-2} \left(2y^2 \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + (x^2 + y^2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta |z|^p = \Delta \varphi &= p \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-2} \left((2x^2 + 2y^2) \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + 2(x^2 + y^2) \right) \\
&= 2p \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}-2} (x^2 + y^2) \left(\left(\frac{p}{2} - 1 \right) + 1 \right) \\
&= p^2 \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(p-2)} = p^2 |z|^{p-2}
\end{aligned}$$

Lemma 3.10 liefert nun das Behauptete. □

Bemerkung. Demzufolge ist $\Delta |f|^p$ mit $p \geq 2$ auch für holomorphe Funktionen f mit Nullstellen definiert.

¹⁰ $|f'|^2$ entspricht der Funktionaldeterminante einer komplex differenzierbaren Funktion.

3.12 Lemma. Sei $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, definiert auf der Kreisscheibe um ξ mit Radius r^* , und $0 < r < r^*$, so

$$M'_\phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-\xi|<r} \Delta\phi \, d\lambda.$$

Beweis.

$$M_\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\xi + re^{it}) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\xi|=r} \phi(z) \, dt$$

mit $z = \xi + re^{it} = \xi + x + iy$ mit $x := r \cdot \cos t$ und $y := r \cdot \sin t$. Daher gilt

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos t \text{ und } \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t,$$

wie auch

$$\frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin t \text{ und } \frac{dy}{dt} = r \cdot \cos t.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} M'_\phi(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\xi|=r} \frac{\partial\phi}{\partial r} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\xi|=r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\xi|=r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \cos t + \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin t \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-\xi|=r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dy - \frac{\partial\phi}{\partial y} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-\xi|<r} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (\text{Stokesscher Integralsatz}) \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-\xi|<r} \Delta\phi \, d\lambda, \end{aligned}$$

wobei beim letzten Integral eine Integration bezüglich des Lebesgueschen Maßes λ des \mathbb{R}^2 zu verstehen ist: $d\lambda(z) = d\lambda = dx dy$. □

Das Maximumprinzip fur die Banachraume ℓ^p im Blick sind wir endlich in der Lage, Satz 2.12 zu verallgemeinern.

3.13 Satz. Sei $p \geq 1$, D ein Gebiet, $\xi \in D$ und $r \in \mathbb{R}^+$ derart, dass die abgeschlossene Kreisscheibe um ξ mit Radius r ganz in D liege. Eine in D holomorphe Funktion f ist genau dann konstant, wenn

$$|f(\xi)|^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^p \, dt.$$

Beweis. Auch für den allgemeinen Fall ergibt trivialerweise die Konstanz der holomorphen Funktion f folgende Gleichheit

$$|f(\xi)|^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^p dt.$$

Für den Fall, dass die holomorphe Funktion f im Punkt ξ den Wert Null annimmt, folgt wegen $0 = |f(\xi)|^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^p dt$ und ihrer Stetigkeit, dass sie auf einer Kreislinie um ξ - und damit auf ganz D - konstant Null ist. Gilt jedoch $f(\xi) \neq 0$, so gibt es aufgrund der Stetigkeit von f auch eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt ξ und Radius $r' < r$ ohne Nullstellen, so dass dort $\Delta |f|^p = p^2 |f|^{p-2} |f'|^2$ für alle $1 \leq p < \infty$ definiert ist. Es genügt zu zeigen, dass die Ableitung $f'(z)$ auf dieser Kreisscheibe mehr als endlich viele Nullstellen besitzt, denn so wäre f' konstant Null - sogar auf ganz D - und damit f konstant.

Nehmen wir das Gegenteil an, so würden Lemma 3.12 und Korollar 3.11 mit

$$M'_{|f|^p}(r^*) = \frac{1}{2\pi r^*} \int_{|z-\xi|<r^*} \Delta |f|^p d\lambda = \frac{1}{2\pi r^*} \int_{|z-\xi|<r^*} p^2 |f|^{p-2} |f'|^2 d\lambda > 0$$

die strenge Monotonie von $M_{|f|^p}(r^*)$ für $0 < r^* \leq r'$ implizieren. Zusammen mit der uns aus den Sätzen 2.9 und 2.11 bekannten schwachen Monotonie von $M_{|f|^p}$ auch außerhalb der besagten Kreisscheibe erhielten wir den gewünschten Widerspruch mit

$$|f(\xi)|^p = M_{|f|^p}(0) < M_{|f|^p}(r') \leq M_{|f|^p}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + re^{it})|^p dt = |f(\xi)|^p.$$

□

Schließlich können wir das vom Fall $p = 2$ abgeschautete Verfahren für $p \geq 1$ anwenden.

3.14 Korollar. *Alle Mitglieder einer Familie $(f_j)_{j \in I}$ in einem Gebiet D holomorpher Funktionen sind konstant, wenn $z^* \in D$ mit $\sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^p < \infty$ und $r \in \mathbb{R}^+$ existieren, so dass für alle $z \in \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z^*| \leq r\} \subset D$ gilt:*

$$\sum_{j \in I} |f_j(z^*)|^p \geq \sum_{j \in I} |f_j(z)|^p.$$

Beweis. Analog zu Satz 2.13 mit „ p “ anstelle von „2“ und vorherigem Korollar.

□

ℓ^p mit $1 \leq p < \infty$ ist MP-Raum.

3.15 Satz. *Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $f : D \rightarrow \ell^p$ eine holomorphe Funktion. Existieren $z^* \in D$ und $r > 0$ derart, dass für alle $|z - z^*| < r$*

$$\|f(z^*)\|_p \geq \|f(z)\|_p$$

gilt, so ist f konstant.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu dem des Satzes 3.5 mit entsprechender p -Norm und Unterstützung von Korollar 3.14. □

3.4 Das Maximumprinzip für die Funktionenräume L^p

Abweichend von der in der Literatur etablierten Vorgehensweise, die Erkenntnisse der L^p auf die L^∞ zu übertragen, konzentrieren wir uns mit diesem Kapitel zunehmend auf geometrische Eigenschaften des zu untersuchenden Banachraumes. Schließlich blieb die Tatsache, dass die Norm konstant ist, sobald ein Normmaximum im Innern vorliegt, bezüglich des (strengen) Maximumprinzips bisher ungenutzt. Wenden wir uns also nun den Lebesgue-Räumen zu und richten unser Augenmerk erneut auf den Fall der Gleichheit in den Hölderschen und Minkowskischen Ungleichungen. Sei (S, \mathfrak{B}, μ) ein Maßraum, dann bezeichne $L^p(S, \mathfrak{B}, \mu)$ den Raum der μ -meßbaren Funktionen $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_S |f|^p d\mu < \infty$ und

p -Norm ($\|f\|_{L^p(S, \mathfrak{B}, \mu)} = \|f\|_p := \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$. $L^\infty(S, \mathfrak{B}, \mu)$

sei der Raum der wesentlich beschränkten μ -meßbaren Funktionen mit Supremumsnorm ($\|f\|_{L^\infty(S, \mathfrak{B}, \mu)} = \|f\|_\infty := \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in S \setminus N} |f(x)|$). Es sei angemerkt, dass die ℓ^p den $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_0)$ mit μ_0 als dem Zähl- oder diskreten Maß entsprechen. Wenn nicht anders angegeben, sei mit L^p der $L^p(S, \mathfrak{B}, \mu)$ gemeint.

3.16 Satz (Höldersche Ungleichung). Seien $1 < p < \infty$ und $q := \frac{p}{p-1}$.

Für $f \in L^p$ und $g \in L^q$ ist $fg \in L^1$ und es gilt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Dabei gilt „ $=$ “ genau dann, wenn $|f|^p$ ein Vielfaches von $|g|^q$ fast überall ist.

Beweis. Da für $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ wegen $\|fg\|_1 = \int_S |fg| d\mu = 0$ die

Aussage bereits trivialerweise richtig ist, sind $c := \frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $d := \frac{|g|}{\|g\|_q}$ definiert, und wir erhalten mit (2) aus dem Beweis von Satz 3.8

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Also ist der Betrag der meßbaren Funktion fg durch eine integrierbare Funktion majorisiert¹¹ und daher selbst integrierbar. $fg \in L^1$. Integrieren wir, so

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int_S \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu \leq \frac{1}{p} \int_S \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \frac{1}{q} \int_S \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Außerdem ist $|f|^p$ ein Vielfaches von $|g|^q$ fast überall genau dann, wenn das Gleichheitszeichen gilt. □

3.17 Satz (Minkowskische Ungleichung). Seien $1 < p < \infty$ und $q := \frac{p}{p-1}$.

¹¹Siehe dazu Majorantenkriterium: Alt[1], Seite 50!

Für $f, g \in L^p$ gilt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Dabei gilt „ $=$ “ genau dann, wenn f ein nichtnegatives Vielfaches von g fast überall ist.

Beweis. Wir können die Höldersche Ungleichung anwenden, da $f + g \in L^p$ wegen L^p linear, und damit $|f + g|^{p-1} \in L^q$.

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_S |f + g|^p d\mu \leq \int_S |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_S |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_S |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}, \text{ da } \frac{p}{q} = p - 1. \end{aligned}$$

Multiplizieren mit $\|f + g\|_p^{1-p}$ ergibt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ und die Höldersche Ungleichung bewirkt, dass Gleichheit genau¹² dann vorliegt, wenn f fast überall ein nichtnegatives Vielfaches von g ist. □

Bemerkung. Obwohl hier erneut $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ trivial, wurden in den vier Sätzen über die Ungleichungen bewusst nur die Fälle $1 < p < \infty$ behandelt, da ausschließlich für jene vier die Zusatzbedingungen - die Gleichheitszeichen betreffend - wahr sind.

Diese geometrische Eigenschaft der L^p ermöglicht uns, einen funktionalanalytischen Weg zur Lösung des Problems dieser Arbeit einzuschlagen und uns einem ersten hinreichenden Kriterium für MP-Räume zu nähern. Jedoch benötigen wir dazu noch weitere Begriffe.

3.18 Definition. Sei X ein linearer Raum und T eine Teilmenge von X .

T heiße *konvex*, wenn mit $x, y \in T$ auch die Verbindungsstrecke in T liegt, wenn also $ax + (1 - a)y \in T$ für alle $a \in [0, 1]$.

$co T = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid x_i \in T, n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i \leq 1, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}$ heiße *konvexe Hülle* oder *Menge aller endlichen Konvexkombinationen von T* .

Bemerkung. $co T$ ist als Schnitt aller konvexen Obermengen von T die kleinste konvexe Menge, die T enthält. Mit $\overline{co T} := \overline{co T}$ sei ihr Abschluss bezeichnet.

3.19 Lemma. Seien D ein Gebiet, B ein Banachraum und $f : D \rightarrow B$ eine holomorphe Funktion mit $\|f(z)\| = 1 \forall z \in D$, so $\|y\| = 1$ für alle $y \in \overline{co f(D)}$.

Beweis.¹³ Sei $y \in co f(D)$, so gibt es nichtnegative Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ und komplexe Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$, so dass $y = \sum_{i=1}^n a_i f(z_i)$. Für das Banachraumelement $f(z_1) \neq 0$ ($\|f(z)\| = 1 \forall z \in D$) existiert nach

¹²Siehe auch Köthe [5] auf Seite 144!

¹³Sinngemäß wie Thorp und Whitley[?], Seite 642.

Korollar 3.1 (Satz von Hahn-Banach) ein Funktional x^* mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(f(z_1)) = \|f(z_1)\| = 1$. Nun ist x^*f also eine skalare holomorphe Funktion mit Betragsmaximum bei z_1 , da $|x^*(f(z))| \leq \|x^*\| \|f(z)\| = 1 = |x^*(f(z_1))|$ für alle $z \in D$, und somit konstant auf D aufgrund des Maximumprinzips. Aus der Linearität von x^* resultiert $x^*(y) = \sum_{i=1}^n a_i x^*(f(z_i)) = \sum_{i=1}^n a_i = 1$ und so folgt

$$1 = |x^*(y)| \leq \|x^*\| \|y\| = \|y\| \leq \sum_{i=1}^n a_i \|f(z_i)\| = \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

$\|y\| = 1$ gilt somit für alle Punkte aus $\text{co } f(D)$ und auch auf dessen Abschluss. \square

L_p ist MP-Raum für $1 < p < \infty$.

3.20 Satz. Seien $1 < p < \infty$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: D \rightarrow L^p$ eine holomorphe Funktion. Existieren $z^* \in D$ und $r > 0$ derart, dass für alle $|z - z^*| < r$

$$\|f(z^*)\|_p \geq \|f(z)\|_p$$

gilt, so ist f konstant.

Beweis. Wie wir aufgrund von Satz 3.3 bereits wissen, ist $\|f(\cdot)\| : D \rightarrow \mathbb{R}$ konstant auf D , weswegen $g(z) := \frac{1}{\|f(z^*)\|} f(z)$ eine auf D holomorphe Funktion mit konstanter Norm 1 darstellt. Für ein beliebiges $z \in D$ gilt laut Lemma 3.19, dass auch die Konvexkombination $\frac{1}{2}[g(z^*) + g(z)]$ der Banachraumelemente $g(z^*), g(z) \in L^p$ die Norm Eins hat. Wegen

$$\|g(z^*)\| + \|g(z)\| = 2 = 2 \cdot \left\| \frac{1}{2}[g(z^*) + g(z)] \right\| = \|g(z^*) + g(z)\|$$

existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $g(z^*) = \alpha \cdot g(z)$, wie den Bemerkungen zur Minkowskischen und Hölderschen Ungleichung zu entnehmen ist. Nun folgt $\alpha = 1$, da

$$\begin{aligned} 2 &= \|g(z^*) + g(z)\| = \|(1 + \alpha)g(z)\| = |1 + \alpha| \|g(z)\| = |1 + \alpha| \text{ und} \\ 1 &= \|g(z^*)\| = \|\alpha g(z)\| = |\alpha| \|g(z)\| = |\alpha|. \end{aligned}$$

Das impliziert $g(z^*) = g(z)$, also g und eben auch f konstant auf D . \square

Beim Studium des letzten Beweises möge man bemerken, dass wir im Prinzip nur eine Eigenschaft der L^p -Räume benötigten, um die Gültigkeit des Maximumprinzips für diese zeigen zu können. Geben wir ihr doch einen Namen und verallgemeinern.

3.21 Definition. Ein normierter Raum X heiße *strikt normiert*, wenn für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x, y \text{ linear abhängig.}$$

Jeder strikt normierte Banachraum ist ein MP-Raum.

3.22 Satz. Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, B ein strikt normierter Banachraum und

$f : D \rightarrow B$ eine holomorphe Funktion. Existieren $z^* \in D$ und $r > 0$ derart, dass für alle $|z - z^*| < r$

$$\|f(z^*)\| \geq \|f(z)\|$$

gilt, so ist f konstant.

Der Beweis erfolgt analog zu dem des vorangegangenen Satzes.

Von den ℓ^p, L^p für $1 < p < \infty$ wissen wir also bereits, dass sie strikt normiert und damit MP-Räume sind. $x \in \ell^1$ sei ein Vektor mit Norm Eins, der kein Vielfaches eines Einheitsvektors von ℓ^1 ist, also genau genommen ein Punkt auf der Einheitssphäre mit mehr als einer Koordinate ungleich Null. Man verteile¹⁴ alle seine von Null verschiedenen Koordinaten auf zwei Vektoren x_1 und x_2 und stelle fest, dass $\frac{x_1}{\|x_1\|_1}, \frac{x_2}{\|x_2\|_1}$ und x alle auf einer Geraden liegen und die Norm Eins haben! Aufgrund der Konvexität der Einheitskugel des ℓ^1 haben alle Punkte der Geraden, speziell der Mittelpunkt $\frac{1}{2}(\frac{x_1}{\|x_1\|_1} + \frac{x_2}{\|x_2\|_1})$, die Norm Eins. Der ℓ^1 ist nicht strikt normiert.

Sei f beliebiger Punkt der Einheitssphäre des $L_1([a, b], \mathfrak{B}_0, \mu)$ mit den Borelmengen \mathfrak{B}_0 und dem Lebesgue-Maß μ . $\|f\|_1 = \int_a^b |f| d\mu = 1$. Man bestimme c

mit $\int_a^c |f| d\mu = \frac{1}{2}$. Nun seien $f_1 := 2f$ auf $[a, c)$ und sonst Null und $f_2 := 2f$ auf

$[c, b]$ und sonst Null, so haben sie ebenso die Norm Eins und f in ihrer Mitte. Der L_1 ist ebenso nicht strikt normiert. Wie bereits diskutiert, ist der ℓ^∞ kein MP-Raum und nach letztem Satz nicht strikt normiert.

Tatsächlich ist eine erste Erkenntnis des Folgekapitels, dass für Banachräume ohne Geraden auf der Einheitssphäre des Banachraumes stets das Maximumprinzip erfüllt ist. Die Existenz derartiger Geraden verhindert zwar die strikte Normiertheit des Raumes; aber verhindert sie auch die Gültigkeit des Maximumprinzips in diesem? Der ℓ^1 und Satz 3.15 sollten uns zweifeln lassen.

3.5 Ein äquivalentes Kriterium

Ein letztes Anliegen soll nun die Frage sein, ob es außer den strikt normierten noch weitere Banachräume gibt, so dass das Maximumprinzip für sie erfüllt ist. Dazu seien nun derartige Banachräume aus einem weiteren Blickwinkel betrachtet und in Anlehnung daran sei ein Begriff eingeführt, der für die Formulierung eines notwendigen Kriteriums an Banachräume für die Gültigkeit des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen mit Werten in diesen hilfreich ist.

Betont sei, dass die Sätze 3.25 bis 3.29 und deren Beweise sinngemäß der Arbeit [7] von Edward Thorp und Robert Whitley entstammen, welche ebendort zeigen können, dass sich dasselbe Kriterium auch als hinreichendes herausstellt.

3.23 Definition. Ein Punkt e einer konvexen Teilmenge T eines Banachraumes B heiße *reeller Extrempunkt von T* , wenn

$$e = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \text{ mit } x_1, x_2 \in T \Rightarrow x_1 = x_2 = e$$

¹⁴Ähnlich Köthe [5] Seite 336.

und heiße *komplexer Extrempunkt* von T , wenn

$$\{e + zy : |z| \leq 1\} \subset T \text{ mit } y \in B \Rightarrow y = 0.$$

Bemerkung. Veranschaulichend könnte man sagen, dass jede Seite/Scheibe mit einem reellen/komplexen Extrempunkt in der Mitte aus T herausragt. Eine einfache Überlegung ergibt, dass jeder reelle auch komplexer Extrempunkt ist.

Wir betrachten im Folgenden des fteren die Menge aller Punkte mit Norm kleiner beziehungsweise gleich Eins. So bezeichnen wir $E_X := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ als die *Einheitskugel* des Raumes X und $\partial E_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ als seine *Einheitssphäre*. Zum Beispiel ist $E_{\mathbb{C}}$ eine alternative Bezeichnung für die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Mithilfe dieser Terminologie werden wir die Frage nach der Gültigkeit des Maximumprinzips auf das Studium der Einheitssphäre des jeweiligen Banachraumes reduzieren und im nächsten Satz das bisher Erreichte aus Satz 3.22 neu formulieren, um durch den Vergleich mit Satz 3.29 eine große Plastizität der Problematik dieses Kapitels zu erreichen.

Schauen wir uns für die abgeschlossenen Einheitskugeln der ℓ^p und L^p deren Menge der reellen Extrempunkte - rE - an!

- (i) $rE_{\ell^1} = \{ze_n \mid n \in \mathbb{N}, e_n \text{ n-ter Einheitsvektor von } \ell^1, |z| = 1\}$
- (ii) $rE_{\ell^p} = \partial E_{\ell^p}$ für $1 < p < \infty$
- (iii) $rE_{\ell^\infty} = \{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| = 1\}$
- (iv) $rE_{L^1} = \emptyset$ mit $L^1 = L^1([a, b], \mathfrak{B}_0, \mu)$
- (v) $rE_{L^p} = \partial E_{L^p}$ für $1 < p < \infty$
- (vi) $rE_{L^\infty} = \{f \in L^\infty \mid |f| = 1 \text{ fast überall}\}$

Bemerkung. (i) und (iv) wurden bereits nach Satz 3.22 skizziert, (iii) bei der Konstruktion eines Gegenbeispiels am Ende des Kapitels 3.1 angedeutet und wird final durch (vi) plausibel, (vi) wird nach Satz 3.26 bestätigt und (ii) wie auch (v) sind exemplarisch für die Allgemeinheit und Inhalt des nächsten Satzes.

Gilt $rE_B = \partial E_B$, so ist B ein MP-Raum.

3.24 Satz. *Ist jeder Punkt der Einheitssphäre eines Banachraums B reeller Extrempunkt der abgeschlossenen Einheitskugel, so gilt das Maximumprinzip. Hat also eine holomorphe Funktion $f : D \rightarrow B$ auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ein Normmaximum, so ist sie konstant.*

Beweis. Wir zeigen dazu lediglich, dass deartige Banachräume strikt normiert sind¹⁵. Es seien $0 \neq x, y \in B$ beliebig und ohne Beschränkung der Allgemeinheit

¹⁵Es liegt sogar eine Äquivalenz vor. Siehe dazu Alt [1] ab Seite 116!

$\|y\| \geq \|x\|$ und es gelte $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, so

$$\begin{aligned} 2 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \left(\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \\ &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{\|x + y\|}{\|x\|} - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) = 2. \end{aligned}$$

Der Punkt $e := \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right)$ hat also wie auch $\frac{x}{\|x\|}$ und $\frac{y}{\|y\|}$ die Norm Eins, liegt somit auf der Einheitskugel und ist daher laut Voraussetzung reeller Extrempunkt der konvexen abgeschlossenen Einheitskugel. Aus der Definition des reellen Extrempunktes folgt direkt die Gleichheit von $\frac{x}{\|x\|}$ und $\frac{y}{\|y\|}$ und damit die lineare Abhängigkeit von x und y . Satz 3.22 komplettiert den Beweis. \square

Der rE_{ℓ^1} gepaart mit Satz 3.15 zeigt uns auf, dass Einheitskugeln von MP-Räumen auf ihrem Rand nicht überall reelle Extrempunkte haben müssen. Umso erfreulicher das Folgende in Hinblick auf ein notwendiges Kriterium.

Jeder Punkt der Einheitssphäre eines MP-Raums ist komplexer Extrempunkt.

3.25 Satz. *Enthält die Einheitssphäre eines Banachraumes B einen Punkt x , der nicht komplexer Extrempunkt der abgeschlossenen Einheitskugel ist, so existiert eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow B$ mit $\|f(z)\| = 1$ für alle $z \in E_{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen existiert also ein $y \neq 0$, so dass $\|x + zy\| \leq 1$ für alle $z \leq 1$. Gäbe es ein $|z^*| \leq 1$ mit $\|x + z^*y\| < 1$, so

$$2 = \|2x\| = \|x + z^*y + x - z^*y\| \leq \|x + z^*y\| + \|x - z^*y\| < 2.$$

Da also $\|x + zy\| = 1$ für alle $|z| \leq 1$, erfüllt $f(z) := x + zy$ das Geforderte. \square

Bemerkung. Es existieren also holomorphe Funktionen mit Werten in derartigen Banachräumen, für welche das Maximumprinzip nicht gilt.

Finden wir auf der Einheitssphäre eines Banachraumes einen Punkt, der nicht komplexer Extrempunkt seiner Einheitskugel ist, so kommt er demnach als MP-Raum nicht mehr infrage. Sei f ein Punkt der Einheitssphäre des $L_{\infty}(S, \mathfrak{B}, \mu)$ mit $\mu(\{s : |f(s)| < 1\}) > 0$. So ist ein $g(s) := 1 - |f(s)|$ nicht die Null des Raumes und die Scheibe $\{f + zg : |z| \leq 1\}$ ragt nicht aus der Einheitskugel, denn $|f(s) + zg(s)| \leq |f(s)| + 1 - |f(s)| = 1$ gilt für alle $s \in S$ und $|z| \leq 1$. f ist also kein komplexer Extrempunkt und der $L_{\infty}(S, \mathfrak{B}, \mu)$ laut letztem Satz kein MP-Raum. Dass Ähnliches für den L_1 scheitert, konnten Thorp und Whitley in [7] auf Seite 644 zeigen und sei hier lediglich zitiert.

3.26 Satz. *Jeder Punkt der Einheitssphäre des $L_1(S, \mathfrak{B}, \mu)$ ist komplexer Extrempunkt seiner Einheitskugel.*

Der L_1 wirft exemplarisch die letzte große Frage auf: Gilt das Maximumprinzip für Banachräume mit einer Einheitskugel, deren Randpunkt ausschließlich komplexe - nicht zwangsweise reelle - Extrempunkte von dieser sind? Abhilfe

leisten die nun folgenden Sätze.

3.27 Lemma. *Es existiert eine reelle Zahl M , so dass sich für alle $n \in \mathbb{N}$ komplexe Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n mit*

- (a) $|z_i| < M$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und
- (b) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = 1$ und
- (c) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^p = 0$ für $p = 2, 3, \dots, n$

finden lassen.

Beweis. Für ein Polynom $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ mit Nullstellen r_1, \dots, r_n sei $R_p := \sum_{i=1}^n (r_i)^p$ für $p = 1, 2, \dots$. So sind die Newton-Identitäten¹⁶:

$$\begin{aligned} R_1 &= -a_1 \\ R_2 + a_1R_1 &= -2a_2 \\ &\dots \\ R_n + a_1R_{n-1} + \dots + a_{n-1}R_1 &= -na_n \end{aligned}$$

und wir sehen, dass das Polynom

$$Q_n(x) = x^n - nx^{n-1} + \frac{n^2}{2!}x^{n-2} - \dots + (-1)^n \frac{n^n}{n!}x^0$$

Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_n hat, die (c) und (b) erfüllen. Wir stellen um und erhalten $Q_n(x) = x^n \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \left(\frac{-n}{x}\right)^p$. J. D. Buckholtz bestimmte mit $M = 3,5911\dots$ die Lösung der Gleichung $M \cdot \lg M = M + 1$, so dass für $|z| \leq \frac{1}{M}$, $|ze^{1-z}| \leq 1$ und $|z| \leq 1$ nach seinem Theorem 2 aus Buckholtz [2] $\sum_{p=0}^n \frac{(nz)^p}{p!} \neq 0$ ist. So müssen die Nullstellen z_1, \dots, z_n von $Q_n(x)$ Beträge kleiner M haben und erfüllen somit auch (a). □

3.28 Satz. *Sei B ein Banachraum und $f : \mathbb{D} \rightarrow B$ eine holomorphe Funktion mit $\|f(z)\| = 1$ für alle $|z| < 1$. Ist $f(0)$ komplexer Extrempunkt der abgeschlossenen Einheitskugel von B , so ist f konstant.*

Beweis. Sei $e := f(0)$. Für die ebenfalls holomorphe Funktion $g(z) := f(z) - e$ folgt durch die Konstruktion $g(0) = 0$ und $x \in \overline{\text{co}} f(\mathbb{D}) \Leftrightarrow x - e \in \overline{\text{co}} g(\mathbb{D})$. Aufgrund des Potenzreihenentwicklungssatzes existiert eine Folge von Elementen des Banachraumes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset B^{\mathbb{N}}$, so dass $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < 1$.

Unter der Annahme, dass g nicht konstant Null ist, sei k die kleinste natürliche Zahl mit $a_k \neq 0$, also a_k der erste Koeffizient von $g(z)$ ungleich Null. Außerdem seien w_1, w_2, \dots, w_k die k -ten Wurzeln der Eins. Die Funktion

$$g_0(z) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g(w_i z^{\frac{1}{k}}) = a_k z + a_{2k} z^2 + \dots := \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad |z| < 1,$$

¹⁶Mitunter bei Uspensky [8] auf den Seiten 260-262 nachzulesen.

ist aufgrund der Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe ebenso holomorph und $\mathfrak{g}_0(z) \in \overline{co} \mathfrak{g}(\mathbb{D})$ für alle $z \in \mathbb{D}$, also $\overline{co} \mathfrak{g}_0(\mathbb{D}) \subset \overline{co} \mathfrak{g}(\mathbb{D})$.

Für ein gegebenes n seien M und z_1, \dots, z_n die laut vorherigem Lemma existierenden reellen beziehungsweise komplexen Zahlen. Nun gilt für alle $|z| < \frac{1}{M}$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathfrak{g}_0(z z_i) = b_1 z + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^m \right) b_m z^m,$$

woran wir erkennen, dass sich $b_1 z$ von einer endlichen Konvexkombination des $\overline{co} \mathfrak{g}_0(\mathbb{D})$ um ein Element aus B mit der Norm kleinergleich $\sum_{m=n+1}^{\infty} \|b_m\| |z M|^m$ unterscheidet. Die Potenzreihen von $\mathfrak{g}(z)$ und folglich $\mathfrak{g}_0(z)$ konvergieren absolut für $|z| < 1$ und wir erhalten $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \|b_m\| |z M|^m = 0$ für alle $|z| < \frac{1}{M}$, woraus $b_1 z \in \overline{co} \mathfrak{g}_0(\mathbb{D}) \subset \overline{co} \mathfrak{g}(\mathbb{D})$ für alle z einer Kreisscheibe um Null mit Radius $\frac{1}{M}$ resultiert. Setzt man $\xi := z \cdot M$ und $y := \frac{b_1}{M} \neq 0$, so gilt

$$b_1 z = b_1 \frac{\xi}{M} = y \xi \in \overline{co} \mathfrak{g}(\mathbb{D}) \text{ für alle } \left| \frac{\xi}{M} \right| < \frac{1}{M} \text{ und also} \\ e + \xi y \in \overline{co} \mathfrak{f}(\mathbb{D}) \text{ für alle } |\xi| < 1.$$

Nach Lemma 3.25 haben aber alle Punkte der abgeschlossenen konvexen Hülle von $\mathfrak{f}(\mathbb{D})$ die Norm 1, also $\{e + \xi y : |\xi| < 1\} \subset \overline{E}_B$, was der Tatsache widerspricht, dass e ein komplexer Extrempunkt der abgeschlossenen Einheitskugel von B ist. Somit nimmt \mathfrak{g} auf der gesamten Einheitskreisscheibe den Wert Null an und \mathfrak{f} ist konstant. □

Bemerkung. Aufgrund des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum ist die Funktion \mathfrak{f} ebenso konstant, sobald sich mit $\mathfrak{f}(z)$, $z \in \mathbb{D}$, ein komplexer Extrempunkt auf \overline{E}_B finden lässt.

In der Literatur werden strikt normierte Räume auch als *rundlich*¹⁷ bezeichnet und es sind bekanntlich genau die Räume, deren Einheitskugel nur aus reellen Extrempunkten der abgeschlossenen Einheitskugel besteht. Würde man ein komplexes Pendant einführen, ließe sich zeigen:

Komplex-rundliche Banachräume sind MP-Räume.

3.29 Satz. *Ist jeder Punkt der Einheitskugel eines Banachraums B komplexer Extrempunkt der abgeschlossenen Einheitskugel, so gilt das Maximumprinzip. Hat also eine holomorphe Funktion $\mathfrak{f} : D \rightarrow B$ auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ein Normmaximum, so ist sie konstant.*

Beweis. Sei $\mathfrak{f}(z) : D \rightarrow B$ eine holomorphe Funktion mit Normmaximum an der Stelle $z^* \in D$ und sei weiter $r \in \mathbb{R}^+$ der Radius einer offenen ganz in D liegenden Kreisscheibe mit Mittelpunkt z^* , dessen Existenz die Offenheit von D gewährleistet. Wie bereits oben diskutiert, ist die Funktion $\|\mathfrak{f}(\cdot)\| : D \rightarrow \mathbb{R}$ subharmonisch und damit konstant auf D . Wäre $\|\mathfrak{f}(z)\| = 0$ für alle $z \in D$,

¹⁷Zum Beispiel bei Thorp und Whitley [7] auf Seite 642.

würde die Konstanz der Funktion bereits direkt folgen.

Für den Fall $\|f(z)\| = a \neq 0$ für alle $z \in D$ sei mit $g := \frac{1}{a}f(z)$ eine holomorphe Funktion definiert, so dass $\|g(z)\| = \frac{1}{a}\|f(z)\| = 1$ für alle $z \in D$. Ferner sei $h : E_{\mathbb{C}} \rightarrow B$ die holomorphe Funktion mit $h(z) := g(rz + z^*)$ und es gilt somit

$$\begin{aligned}\|f(z)\| &= a \quad \text{für } |z - z^*| < r, \\ \|g(z)\| &= 1 \quad \text{für } |z - z^*| < r, \\ \|h(z)\| &= 1 \quad \text{für } |z| < 1.\end{aligned}$$

Also auch $h(0)$ liegt auf der Einheitskugel von B und ist damit komplexer Extrempunkt der abgeschlossenen Einheitskugel von B . Wegen Satz 3.28 folgt die Konstanz von h auf \mathbb{D} und damit die von g und f auf $\{z : |z - z^*| < r\}$. Der entsprechende Identitätssatz gewährleistet nun die Konstanz von f auf ganz D . \square

Satz 3.25 und Satz 3.29 besagen in Summe, dass das Maximumprinzip für einen Banachraum genau dann erfüllt ist, wenn alle seine Punkte mit Norm Eins auch komplexe Extrempunkte seiner abgeschlossenen Einheitskugel sind, also jede auf einem Gebiet holomorphe Funktion mit Werten in diesem entweder kein Normmaximum im Innern des Gebietes hat oder konstant ist.¹⁸

¹⁸[10] Strotzt Vor Weisheit!

4 Literatur

- [1] **Hans Wilhelm Alt**, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Vierte, überarbeitete und erweiterte Auflage, 2002.
- [2] **J. D. Buckholtz**, *A characterization of the exponential series*, Amer. Math. Monthly 73, 1966, 121-123.
- [3] **Israel Gohberg** und **Jürgen Leiterer**, *Holomorphic Operator Functions of One Variable and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2009.
- [4] **Lars Hörmander**, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland mathematical library, Third, revised, edition, 1990.
- [5] **Gottfried Köthe**, *Topologische lineare Räume I*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.
- [6] **Walter Rudin**, *Reelle und Komplexe Analysis*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, Wien, 1999.
- [7] **Edward Thorp** and **Robert Whitley**, *The strong Maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 18, 1967, no. 4, 640-646.
- [8] **J. V. Uspensky**, *Theory of equations*, McGraw-Hill, New York, 1948.
- [9] **Dirk Werner**, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [10] **Arnd Zeigler**, *Lebenslang grün-weiß*, Edition Temmen, Bremen, 2006.

5 Thesen

Thema des Kapitels 3.4 war die strikte Normiertheit eines Banachraumes. Ein dazu äquivalenter Begriff ist die strikte Konvexität, wie Alt [1] auf Seite 116 leicht zeigt. Motiviert ist diese Bezeichnung durch die Überlegung, dass der Mittelpunkt zweier Randpunkte einer Kugel eines konvexen Raumes trotzdem auch auf dem Rand dieser liegen kann. In strikt konvexen Räumen ist dies genau nicht möglich. Auch der Begriff der gleichmäßigen Konvexität, der in einigen Werken der Funktionalanalysis diskutiert wird, hätte den Beweis des Maximumprinzips nicht erleichtert. Sehr technisch und aufwendig kann für die ℓ^p und L^p mit $1 < p < \infty$ die gleichmäßige Konvexität gezeigt werden, die die strikte Normiertheit nach sich zieht. Im Hinblick auf das Maximumprinzip konnten wir jedoch an den Beispielen ℓ_1 und L_1 sehen, dass seine Gültigkeit nicht mit den strikt konvexen Räumen einhergeht, so dass erst mit der Einführung des Begriffes des komplexen Extrempunktes die nötige Klassifizierung realisiert werden konnte.

Da das Vorhandensein eines Skalarproduktes die gleichmäßige Konvexität und damit die strikte Normiertheit eines Raumes impliziert, ist das Kapitel 3.2 eher als Heranführung an die Gesamtproblematik zu betrachten. Jedoch war die Technik beispielhaft. So war es die Idee, die holomorphe Funktion mit Werten in einem Banachraum in abzählbar viele skalare holomorphe Funktionen zu zerlegen, so dass die Gültigkeit des Maximumprinzips auf den skalaren Fall zurückgeführt werden kann. Zwar war es für die abzählbaren Elemente der ℓ^p mit einigem Aufwand mittels des Satzes von Stokes noch möglich, das Verfahren zu immitieren, jedoch bereits für die L^p ist dies nicht mehr ohne Weiteres umsetzbar, da grundsätzlich nur die Existenz der Folgen von Treppenfunktionen - konvergierend gegen die Elemente des Raumes - gegeben ist und sich so eine Konstruktion repräsentativer skalarer Funktionen schwierig gestaltet. Für separable Urbildräume der Elemente des L^p wäre es ein Ansatz, mit Hilfe der Schauder-Basen¹⁹ jene Technik auf diese Räume anzuwenden.

¹⁹Sie Alt [1] auf Seite 270!

Selbständigkeitserklärung.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 1. Oktober 2010

Jonas Werner

Einverständniserklärung.

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, dass ein Exemplar meiner Diplomarbeit in der Bibliothek des Institutes für Mathematik verbleibt.

Berlin, den 1. Oktober 2010

Jonas Werner